ДОНЕЦКАЯ НАРОДНАЯ РЕСПУБЛИКА

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

УЧРЕЖДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Донецкая Республиканская Малая Академия Наук учащейся молодежи»

Отделение: математика

Секция: математика

СВОЙСТВО ДВУХ ПУЧКОВ ЧЕВИАН И ДВУХ СЕКУЩИХ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Работу выполнила:
Родченко Алина,
ученица 9 класса
МОУ «Лицей «Интеллект»
г. Донецка»
Научный руководитель:
Толпыгин Александр Егорович,
специалист высшей категории,
учитель-методист

Донецк-2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия – очень интересная и важная наука. Ее надо знать и рабочему, и инженеру, и архитектору, и художнику. Геометрия развивает пространственное мышление, учит строить логические цепочки, рассуждать, логически мыслить, делать выводы. Галилео Галилей сказал: «Геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать».

- Актуальность исследования:

  Во-первых, оно отвечает насущным практическим потребностям учащихся, готовящимся к поступлению в ВУЗ, во-вторых, заполняет пробел в известных элементарных свойствах треугольника.
- Объект исследования: произвольный треугольник.
- Предмет исследования: свойство двух пучков чевиан и двух секущих в треугольнике.
- Цель: доказательство свойства двух пучков чевиан и двух секущих в треугольнике.
- Методы исследования:

а) логический, состоящий из гипотез, представляющих идею исследования;

б) аналитический, позволяющий доказать гипотезы с помощью элементарной математики.

Работа носит теоретический характер. Указанные свойства доказаны впервые и могут быть полезны при решении задач.

РАЗДЕЛ 1
СВОЙСТВО ДВУХ ПУЧКОВ ЧЕВИАН В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

1.1. Утверждение 1

Пусть в $\triangle ABC$(рис.1.1) проведены прямые AA_1, BB_1 и CC_1,пересекающиеся в одной точке O_1, и прямые AA_2, BB_2 и CC_2, пересекающиеся в одной точке O_2.

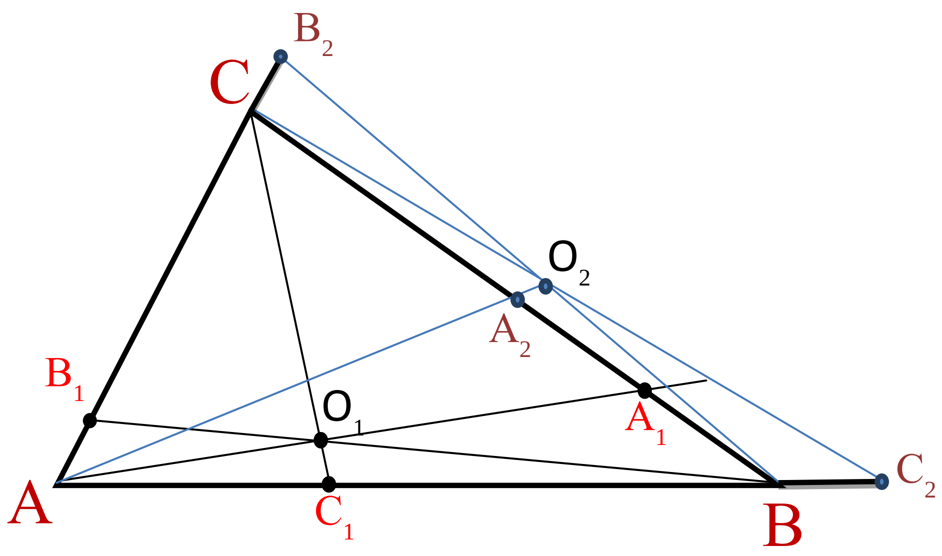

Рис.1.1

Прямые этих двух пучков чевиан пересекаются в шести точках (если не считать вершины треугольника). Через эти точки пересечения и вершины $\triangle ABC$ проведем прямые, а именно:

через точку пересечения прямых AA_1 и BB_2 (это т. F) – прямую CC_{12},

через точку пересечения прямых BB_1 и CC_2 (это т. К) – прямую AA_{12},

через точку пересечения прямых CC_1 и AA_2 (это т. L) – прямую BB_{12},

через точку пересечения прямых AA_2 и BB_1 (это т. M) – прямую CC_{21},

через точку пересечения прямых BB_2 и CC_1 (это т. N) – прямую AA_{21},

через точку пересечения прямых CC_2 и AA_1 (это т. T) – прямую BB_{21}.

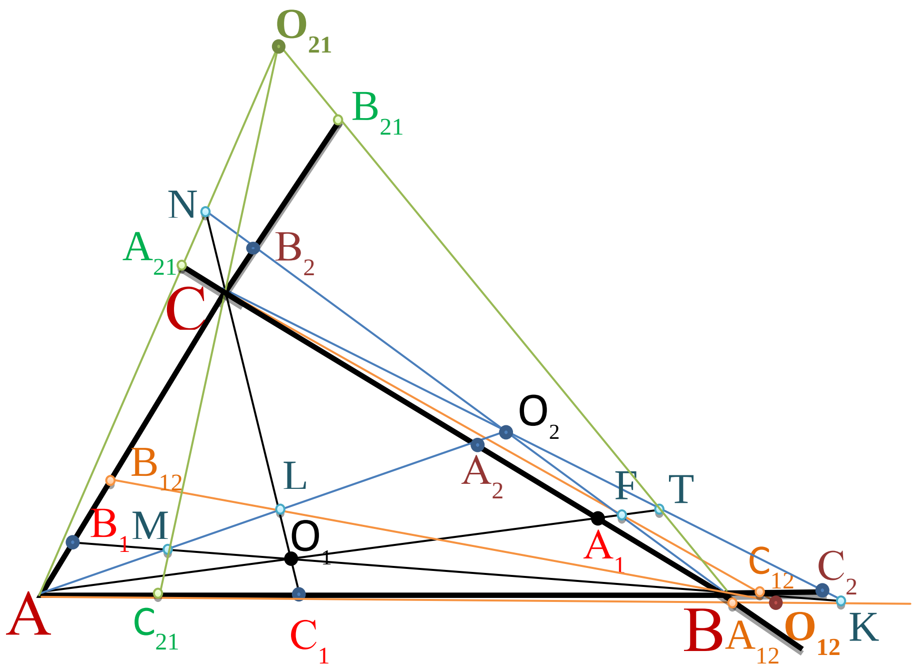

Рис.1.2

Я утверждаю, что прямые AA_{12} , BB_{12} и CC_{12} проходят через одну точку, и точно так же прямые AA_{21} , BB_{21} и CC_{21} проходят через одну точку.

1.2. Доказательство

Так как прямые AA_1 , BB_2 , CC_{12} проходят через одну точку (это т. F), то по теореме Чевы:

$$\frac{AC_{12}}{C_{12}B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_2}{B_2A} = 1 \quad \text{или} \quad AC_{12} \times BA_1 \times CB_2 = C_{12}B \times A_1C \times B_2A \qquad (1.1)$$

Подобные равенства можно написать для остальных троек прямых, проходящих через одну точку. Так получим шесть равенств:

$$\begin{cases} AC_{12} \times BA_1 \times CB_2 = C_{12}B \times A_1C \times B_2A , \\ AC_2 \times BA_{12} \times CB_1 = C_2B \times A_{12}C \times B_1A , \\ AC_1 \times BA_2 \times CB_{12} = C_1B \times A_2C \times B_{12}A , \\ AC_{21} \times BA_2 \times CB_1 = C_{21}B \times A_2C \times B_1A , \\ AC_1 \times BA_{21} \times CB_2 = C_1B \times A_{21}C \times B_2A , \\ AC_2 \times BA_1 \times CB_{21} = C_2B \times A_1C \times B_{21}A . \end{cases} \qquad (1.2)$$

Перемножив почленно первые три равенства и сделав то же самое с тремя последними равенствами, получим два равенства:

$$\begin{cases} AC_{12} \times BA_{12} \times CB_{12} \times BA_1 \times CB_1 \times AC_1 \times CB_2 \times AC_2 \times BA_2 = \\ = C_{12}B \times A_{12}C \times B_{12}A \times A_1C \times B_1A \times C_1B \times B_2A \times C_2B \times A_2C\ , \\ AC_{21} \times BA_{21} \times CB_{21} \times BA_2 \times CB_2 \times AC_2 \times CB_1 \times AC_1 \times BA_1 = \\ = C_{21}B \times A_{21}C \times B_{21}A \times A_2C \times B_2A \times C_2B \times B_1A \times A_1C \times C_1B \end{cases} \qquad (1.3)$$

Пременив теорему Чевы к прямым AA_1, BB_1, CC_1 и к прямым AA_2, BB_2, CC_2, получим:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \times \frac{CA_1}{A_1B} \times \frac{BC_1}{AC_1} = 1\ ,$$

$$\frac{AB_2}{CB_2} \times \frac{CA_2}{BA_2} \times \frac{BC_2}{AC_2} = 1\ . \qquad (1.4а)$$

или записав эти равенства в другом виде:

$$AB_1 \times CA_1 \times BC_1 = B_1C \times A_1B \times C_1A\ ,$$

$$CB_2 \times AC_2 \times BA_2 = AB_2 \times BC_2 \times CA_2. \qquad (1.4б)$$

Используя равенства (1.4б), проведем сокращения в равенствах системы (1.3).

$$\begin{cases} AC_{12} \times BA_{12} \times CB_{12} \times \overline{\overline{BA_1}} \times \overline{\overline{CB_1}} \times \overline{\overline{AC_1}} \times \overline{CB_2} \times \overline{AC_2} \times \overline{BA_2} = \\ = C_{12}B \times A_{12}C \times B_{12}A \times \overline{\overline{A_1C}} \times \overline{\overline{B_1A}} \times \overline{\overline{C_1B}} \times \overline{B_2A} \times \overline{C_2B} \times \overline{A_2C} \\ AC_{21} \times BA_{21} \times CB_{21} \times \overline{\overline{BA_2}} \times \overline{\overline{CB_2}} \times \overline{\overline{AC_2}} \times \overline{CB_1} \times \overline{AC_1} \times \overline{BA_1} = \\ = C_{21}B \times A_{21}C \times B_{21}A \times \overline{\overline{A_2C}} \times \overline{\overline{B_2A}} \times \overline{\overline{C_2B}} \times \overline{B_1A} \times \overline{A_1C} \times \overline{C_1B} \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{cases} AC_{12} \times BA_{12} \times CB_{12} = C_{12}B \times A_{12}C \times B_{12}A\ , \\ AC_{21} \times BA_{21} \times CB_{21} = C_{21}B \times A_{21}C \times B_{21}A\ . \end{cases} \qquad (1.5)$$

Отсюда по теореме, обратной теореме Чевы, делаем заключение, что прямые AA_{12}, BB_{12}, CC_{12} проходят через одну точку (она обозначена на рисунке через O_{12}) и что прямые AA_{21}, BB_{21}, CC_{21} также проходят через одну точку (она обозначена на рисунке через O_{21}).

Так как теорема Чевы верна независимо от того, находится ли точка пересечения внутри или вне треугольника, то и доказанное нами предположение верно при любом положении центров двух пучков чевиан.

РАЗДЕЛ 2
СВОЙСТВО ДВУХ СЕКУЩИХ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

2.1. Утверждение 2

Пусть теперь стороны $\triangle ABC$ (или их продолжения) пересечены двумя прямыми, пересекающими стороны треугольника в точках A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 (рис.2.1).

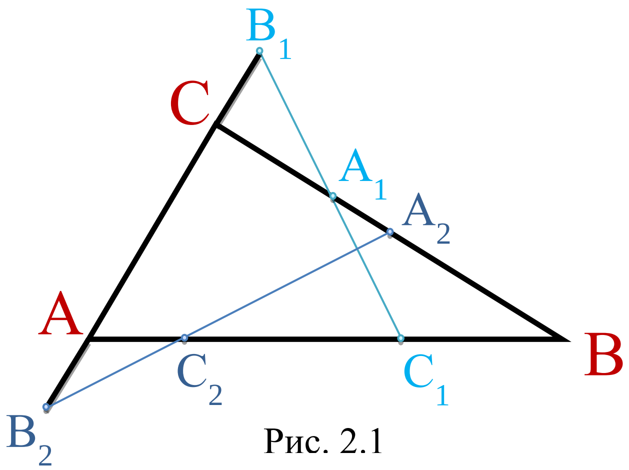

Рис. 2.1

Проведем прямые A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 и назовем точки их пересечения соответственно со сторонами AB, BC и AC треугольника через C_{12}, A_{12} и B_{12} (Рис.2.2)

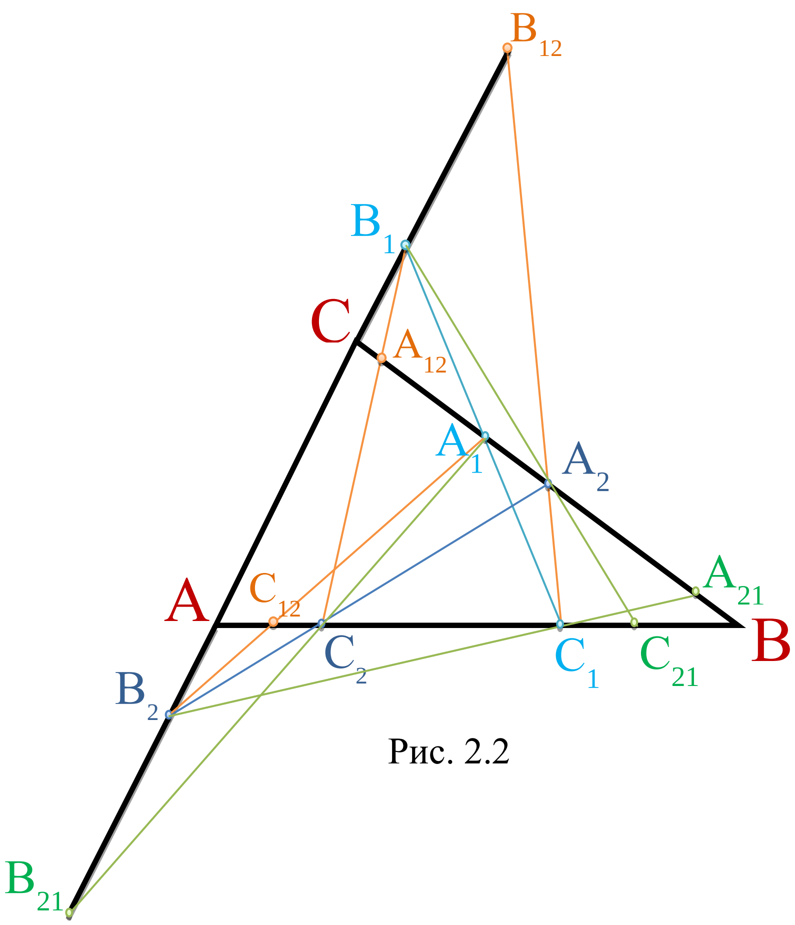

Рис. 2.2

Я утверждаю, что точки C_{12} , A_{12} и B_{12} лежат на одной прямой.

Точно так же, если мы проведем прямые A_2B_1 , B_2C_1 , C_2A_1 , то точки C_{21} , A_{21} и B_{21} их пересечения соответственно со сторонами AB, BC и AC лежат на одной прямой.

2.2Доказательство

Так как точки A_1 , B_2 , C_{12} лежат на одной прямой, то по теореме Менелая

$$AC_{12} \times BA_1 \times CB_2 = C_{12}B \times A_1C \times B_2A \qquad (2.1)$$

Подобные равенства можно написать для каждой из остальных пяти прямых:

прямая $A_1B_2C_{12}$:

$$AC_{12} \times BA_1 \times CB_2 = C_{12}B \times A_1C \times B_2A ,$$

прямая $B_1C_2A_{12}$:

$$AC_2 \times BA_{12} \times CB_1 = C_2B \times A_{12}C \times B_1A ,$$

прямая $C_1A_2B_{12}$:

$$AC_1 \times BA_2 \times CB_{12} = C_1B \times A_2C \times B_{12}A ,$$

прямая $A_2B_1C_{21}$:

$$AC_{21} \times BA_2 \times CB_1 = C_{21}B \times A_2C \times B_1A ,$$

прямая $B_2C_1A_{21}$:

$$AC_1 \times BA_{21} \times CB_2 = C_1B \times A_{21}C \times B_2A ,$$

прямая $C_2A_1B_{21}$:

$$AC_2 \times BA_1 \times CB_{21} = C_2B \times A_1C \times B_{21}A . \qquad (2.2)$$

Перемножив почленно первые три равенства и сделав то же с тремя последними равенствами, получим:

$$\begin{cases} AC_{12} \times BA_{12} \times CB_{12} \times BA_1 \times CB_1 \times AC_1 \times CB_2 \times AC_2 \times BA_2 = \\ = C_{12}B \times A_{12}C \times B_{12}A \times A_1C \times B_1A \times C_1B \times B_2A \times C_2B \times A_2C \\ AC_{21} \times BA_{21} \times CB_{21} \times BA_2 \times CB_2 \times AC_2 \times CB_1 \times AC_1 \times BA_1 = \\ = C_{21}B \times A_{21}C \times B_{21}A \times A_2C \times B_2A \times C_2B \times B_1A \times A_1C \times C_1B \end{cases} \qquad (2.3)$$

Применим теорему Менелая к прямым $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$:

$$AB_1 \times CA_1 \times BC_1 = B_1C \times A_1B \times AC_1 \,,$$

$$AB_2 \times CA_2 \times BC_2 = CB_2 \times BA_2 \times AC_2 \,. \qquad (2.4)$$

Используя равенства (2.4), упростим систему (2.3). После сокращений получим:

$$\begin{cases} AC_{12} \times BA_{12} \times CB_{12} = C_{12}B \times A_{12}C \times B_{12}A \,, \\ AC_{21} \times BA_{21} \times CB_{21} = C_{21}B \times A_{21}C \times B_{21}A \,. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Отсюда по теореме, обратной теореме Менелая, делаем заключение, что три точки A_{12} , B_{12} , C_{12} лежат на одной прямой и точки A_{21} , B_{21} , C_{21} также лежат на одной прямой (Рис.2.3).

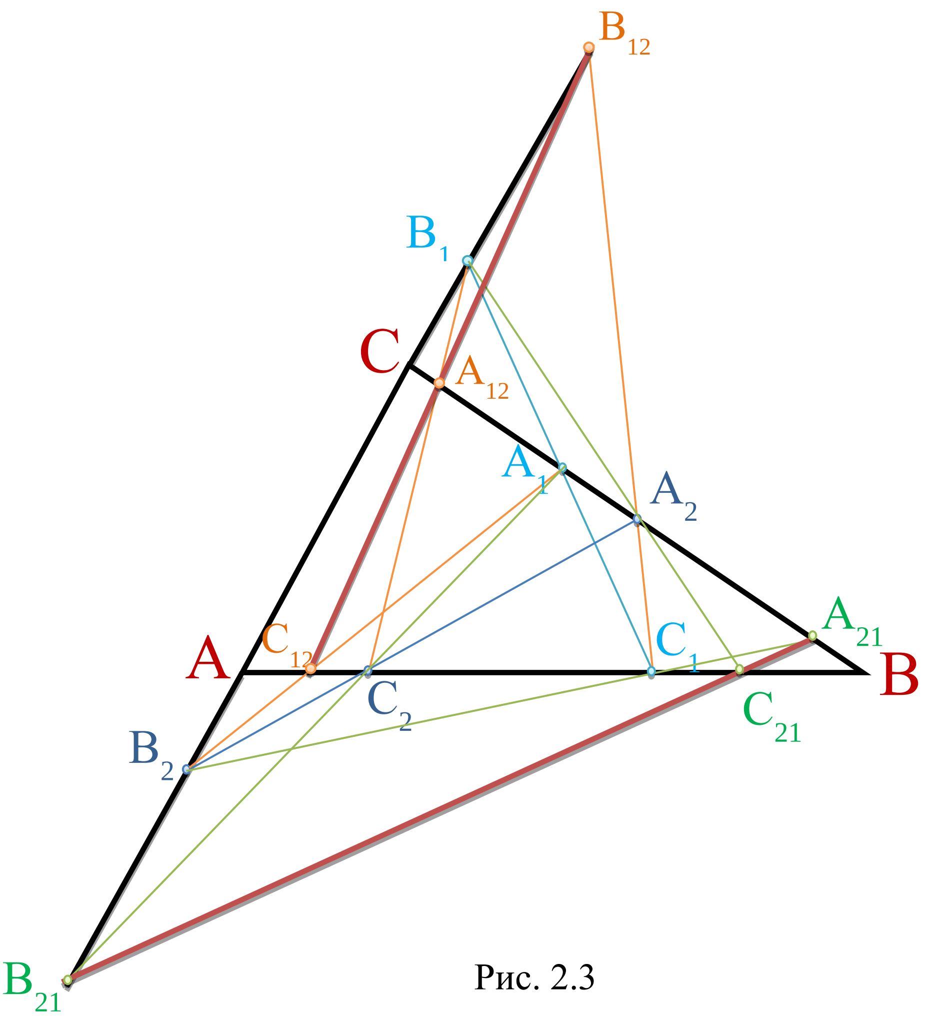

Рис. 2.3

ВЫВОДЫ

В ходе проведенного исследования было доказано свойство двух пучков чевиан и двух секущих в треугольнике. Эти свойства могут быть полезны для решения многих задач. Работа носит теоретический характер. Указанные свойства выведены впервые.

Работа рассматривает лишь один из аспектов проблемы. Исследования в этом направлении будут продолжены. Это может быть изучение свойств описанной окружности и секущей в треугольнике, проведенной согласно некоторым условиям.

Исследование в корне изменило мое представление о возможностях элементарной математики.

Список литературы

1.Александров А.Д. , Вернер А.Л. , Рыжик В.И.   Геометрия, учебник. – 3-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 2003, – 272 с.: ил. – ISBN 5-09-012215-6

2.Куланин Е.Д. , Федин С.Н.   Геометрия треугольника в задачах: Учебное пособие. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009, – 208 с.

3.Понарин Я.П.   Элементарная геометрия. Том 1, МЦНМО, 2004 г.

4.Прасолов В.В.   Задачи по планиметрии. МЦНМО, 2006 г.