

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

УЧРЕЖДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Донецкая Республиканская Малая Академия Наук учащейся молодежи»

Отделение: математика
Секция: математическое
моделирование

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ
МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧЕ О ПЕРЕМЕЩЕНИИ ДИВАНА

Работу выполнила:
Стукало Виктория
Владимировна, ученица 10 класса
МОУ «Лицей «Интеллект»
города Донецка»
Научный руководитель:
Толпыгин Александр Егорович,
учитель математики МОУ
«Лицей «Интеллект» г.
Донецка», специалист высшей
категории, учитель-методист

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
РАЗДЕЛ 1. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ.....	5
1.1. ИССЛЕДОВАНИЕ 1.....	5
1.2. ИССЛЕДОВАНИЕ 2.1.....	7
1.3. ИССЛЕДОВАНИЕ 2.2.....	8
1.4. ИССЛЕДОВАНИЕ 3.....	9
1.5. ИССЛЕДОВАНИЕ 4.....	9
ВЫВОДЫ.....	13
Список литературы.....	14

ВВЕДЕНИЕ

В 1966г. австро-канадский математик Лео Мозер[5] предложил задачу: «По прямолинейному коридору, имеющему ширину 1 м и поворачивающемуся на 90° по отношению к своему первоначальному направлению, нужно передвинуть диван так, чтобы он развернулся на повороте. Какую максимальную площадь может иметь диван?»

Несмотря на простоту постановки задачи, она оказалась очень сложной в решении.

Все результаты были получены с помощью высшей математики и компьютерного моделирования.

Так, Джон Хаммерсли[3] получил нижнюю границу площади $S = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \approx 2,2074$ для дивана на рисунке 1.

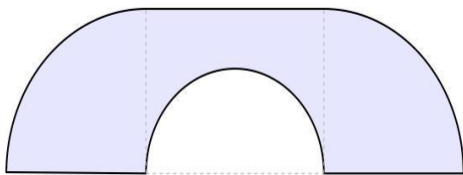


Рис. 1

Ему также принадлежит верхняя оценка площади $S \leq 2\sqrt{2} \approx 2,828$.

Джозеф Гервер улучшил этот результат и получил диван, состоящий из 18 секций, описанных в аналитической форме. Его площадь равна $S = 2,2195$.

В июне 2017 г. появилась публикация[3], в которой Дан Ромик и Иоав Каллус дали описание алгоритма, практическая реализация которого на одном ядре IntelXeonE5-2630 с частотой 2,3 Гц в течение 480 часов работы дала результат $S \approx 2,37$.

Тема моей работы: «Построение и исследование математических моделей в задаче о перемещении дивана».

Актуальность исследования определяется, во-первых, отсутствием окончательного решения задачи, во-вторых, тем, что поиски решения могут привести к возникновению новых методов, а может, и направлений в математике.

Одному из авторов последнего решения принадлежат слова: «Хотя проблема перемещения дивана может показаться абстрактной, решение включает в себя новые математические методы, которые могут проложить путь к более сложным идеям» (Дан Ромик [1]).

Объект исследования: задача оптимизации в определённых пространствах многоугольных форм.

Предмет исследования: математические модели в задаче о перемещении дивана.

Цель: нахождение дивана наибольшей площади средствами элементарной математики.

Задачи:

1. Изучить литературу по теме.
2. Систематизировать и углубить знания.
3. Повысить качество знаний и умений.
4. Осуществить исследование математических моделей и найти диван наибольшей площади.
5. Оформить работу.
6. Создать электронную презентацию.

Методы исследования:

изучение литературы и интернет-ресурсов, анализ и классификация информации, сравнение, аналогии, моделирование, обобщение.

Работа носит теоретико-прикладной характер.

Степень новизны: данная задача была поставлена более 50 лет назад и до сих пор не была окончательно решена. В научной работе осуществлена попытка получить результат, не используя методы высшей математики, и, по возможности, усовершенствовать заключения предшественников. Также был описан метод, который не упоминается ни в одном из источников. Есть вероятность того, что дальнейшее развитие идеи всё же приведёт исследователей к желаемому ответу.

РАЗДЕЛ 1

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Решение рассматриваемой задачи разбивается на две подзадачи: креативно-графическую, связанную с поиском и построением некой плоской фигуры, удовлетворяющей требованию перемещения без зазоров (по контактным точкам) в габаритах Г-образного коридора, и математически-аналитическую, связанную с определением условия достижения максимальной площади этой фигуры[2,3,4,6].

1.1. Исследование 1

Введём следующие допущения. Будем считать, во-первых, стену коридора и стороны дивана прямыми, во-вторых, ширину дивана равной нулю. Последнее допущение позволяет в качестве математической модели дивана взять отрезок. Пусть ширина коридора равна 1, а длина дивана $AB=L$ (Рисунок 2).

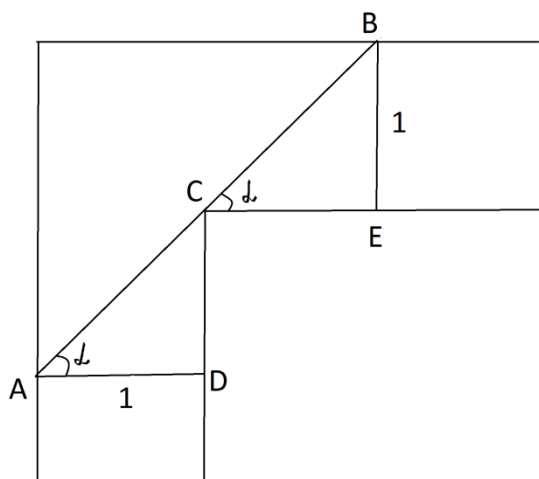


Рис. 2

Тогда из $\triangle ACD$:

$$\cos \alpha = \frac{AD}{AC}, \quad AC = \frac{AD}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha};$$

из $\triangle BCE$:

$$BC = \frac{BE}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$L = AC + BC = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha}; \text{ так как } 0^\circ < \alpha < 90^\circ, \text{ то } \sin \alpha > 0 \text{ и } \cos \alpha > 0.$$

Определим наименьшее значение L и соответствующее ему значение угла α .

Возведём обе части выражения для L в квадрат:

$$L^2 = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\frac{1}{4} \cdot 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{4 + 4 \sin 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}, \text{ где } 0 < \sin 2\alpha \leq 1.$$

Пусть $\sin 2\alpha = t$, $0 < t \leq 1$, тогда

$$L^2 = \frac{4 + 4t}{t^2} = \left(\frac{2}{t}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{t}\right).$$

Заменим $\frac{2}{t} = m$, исследуем функцию $f(m) = m^2 + 2m$ (Рисунок 3).

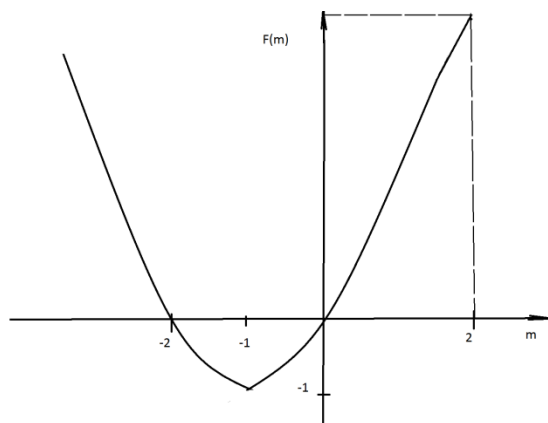


Рис. 3

При этом минимальное значение m равно 2 при $t=1$, а значение функции $f(m) = L^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8$.

Отсюда $L = 2\sqrt{2}$, а угол α можно определить из равенства:

$$\sin 2\alpha = 1, 2\alpha = 90^\circ, \alpha = 45^\circ.$$

Вывод: наибольшая длина дивана, когда отношение его ширины к длине близко к нулю, равна $2\sqrt{2} \approx 2,83$. При этом диван не застрянет в повороте.

1.2. Исследование 2.1

Усложним модель: будем учитывать ширину дивана. Найдём наибольшую длину дивана шириной C , который не застрянет в повороте. В качестве математической модели возьмём прямоугольник.

Пусть ширина коридора равна 1, длина дивана $AB=L$, его ширина $AD=c$ (Рисунок 4).

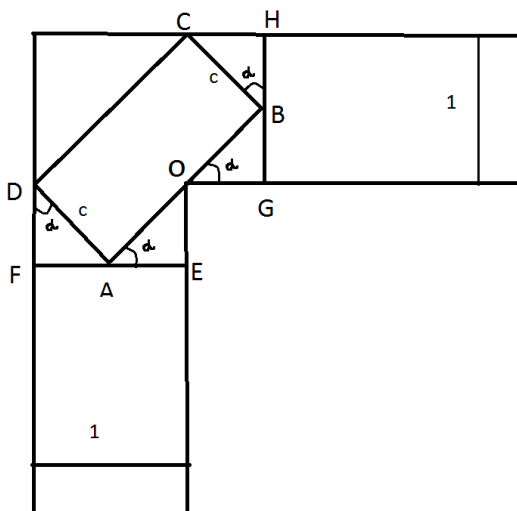


Рис. 4

Применим результат предыдущего решения: будем считать, что при $\angle OAE = 45^\circ$ длина AB будет максимальной.

Из $\triangle ADF$:

$$AF = AD \cdot \sin \alpha = c \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}c,$$

$$AE = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

Из $\triangle AOE$:

$$AO = \frac{AE}{\cos \alpha} = \sqrt{2} - c;$$

$$AB = 2 \cdot OA = 2 \cdot (\sqrt{2} - c) \approx 2,83 - 2c.$$

Вывод: Следовательно, для случая, когда ширина дивана равна c , *наибольшая* длина дивана, который не застрянет в повороте, должна быть $2,83 - 2c$.

1.3. Исследование 2.2

Определим теперь размеры дивана прямоугольной формы, который имеет максимальную площадь и который не застрянет в повороте. Такая постановка задачи уже близка к задаче, предложенной Мозером.

Математической моделью дивана опять будет прямоугольник. Однако, согласно с условием, необходимо уточнить аналитическую модель задачи.

Воспользуемся решением предыдущей задачи:

$$S = AD \cdot AB = 2 \cdot (\sqrt{2} - c) \cdot c = 2\sqrt{2}c - 2c^2, \text{ где } c - \text{ переменная величина.}$$

Необходимо найти значение c , при котором S будет принимать максимальное значения. Построим график функции $S(c)$ (Рисунок 5).

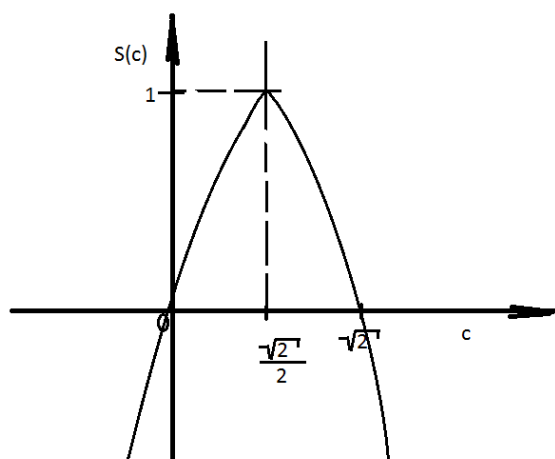


Рис. 5

$$c_0 = -\frac{2\sqrt{2}}{-2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad S(c_0) = S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1.$$

$$AB = 2\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

Вывод: диван длиной $\sqrt{2}$ и шириной $\frac{\sqrt{2}}{2}$ будет иметь максимальную площадь $S=1$ и не застрянет в повороте.

Замечание. Частным случаем прямоугольника является квадрат со стороной, равной 1. В этом случае диван пройдет без поворота вокруг точки O и его площадь также равна 1.

1.4. Исследование 3

Интуитивно понятно, что максимальную площадь можно увеличить, если заменить прямоугольник полукругом с радиусом, равным 1 (Рисунок 6).

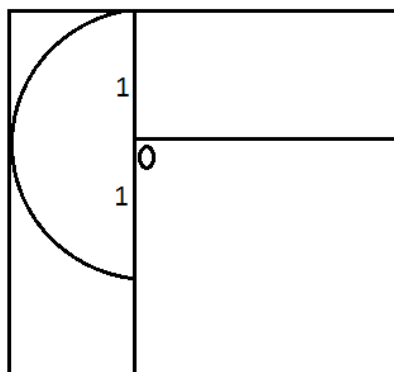


Рис. 6

Площадь такого дивана $S = \pi * 1^2 * \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$, что значительно больше площади прямоугольного дивана.

Вывод: полученное значение примем за оценку снизу для площади дивана.

1.5. Исследование 4

Попробуем найти фигуру, которая бы, являясь математической моделью дивана, имела большую площадь.

Проведём две дуги окружностей с центром на биссектрисе прямого угла. Одна должна касаться внешней стены коридора, а другая - проходить через точку F (Рисунок 7).

Однако эту площадь можно увеличить, если добавить к кольцу P_1KQ_1TMF две фигуры: P_1FP и Q_1TQ . При этом получится фигура $PKQTMF$, которая будет иметь площадь большую, чем 1,57, и сможет развернуться в Г-образном коридоре.

Для нахождения площадей P_1FP и Q_1TQ заметим, что при повороте на 90° фигура Q_1TQ займёт положение P_1FH . Следовательно, можно сразу находить сумму площадей P_1FP и Q_1TQ , т.е. S_{HP1PF} .

$$S_{HP1PF} = S_{KLP} - S_{HFLH1} - S_{KHH1}. \quad (1)$$

$$\text{При } R = \sqrt{2} \quad OL = \frac{\sqrt{2}}{2} * \sqrt{2} = 1.$$

Введём в систему координат с центром в т. О. В этой системе прямая HF имеет уравнение $y=1$, а большая окружность $x^2+y^2=2^2$.

Имеем систему:

$$\begin{cases} y=1 \\ x^2+y^2=4, \text{ откуда } x=\pm\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\text{Следовательно, } |OH_1|=\sqrt{3}, |H_1L|=\sqrt{3}-1 \text{ и } S_{HFLH1} = H_1L * HH_1 = \sqrt{3}-1. \quad (2)$$

Далее $x_L = -1$ и получаем:

$$\begin{cases} x=-1 \\ x^2+y^2=4, \text{ откуда } y_L=\sqrt{3}, |LP|=\sqrt{3}. \end{cases}$$

Из $\triangle PLO$:

$$\frac{PL}{OL} = \operatorname{tg} \angle LOP$$

$$\operatorname{tg} \angle LOP = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, \angle LOP = 60^\circ.$$

$$S_{\text{сегм}(PKQ)} = S_{\text{сект}(PKQO)} - S_{\triangle POQ} = \frac{\pi * KO^2}{360^\circ} * 120^\circ - LP * LO = \frac{\pi * 2^2}{3} - \sqrt{3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

$$S_{KLP} = \frac{1}{2} * S_{\text{сегм}(PKQ)} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3)$$

Из $\triangle HON_1$:

$$\frac{HN_1}{ON_1} = \operatorname{tg} \angle HON_1,$$

$$\operatorname{tg} \angle HON_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \angle HON_1 = 30^\circ.$$

$$S_{KHH1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi * KO^2}{360^\circ} * 60^\circ - HN_1 * OH_1 \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (4)$$

Подставляя полученные значения в формулу (1), имеем:

$$S_{\text{НР1РФ}} = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (\sqrt{3} - 1) - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} + 1 - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3} \approx 0,32.$$

Вывод: Таким образом, общая площадь фигуры $S_{\text{общ}} \approx 1,57 + 0,32 \approx 1,89$, что превышает принятую нами оценку снизу на 0,32.

ВЫВОДЫ

Конфигурация дивана, найденная в процессе исследования, не описана в литературе и интернет-ресурсах, следовательно, можно утверждать, что определена впервые.

Результат получен с помощью элементарного математического аппарата, доступного учащемуся средней школы.

Цель, поставленная при написании работы, достигнута. Для дальнейшего улучшения результата, очевидно, необходимо использовать методы высшей математики и компьютерного моделирования.

Если рассмотреть формы диванов, полученные различными исследователями, можно заметить, что последние четыре похожи: все они представляют невыпуклые фигуры; первый диван, полученный в нашей работе и имеющий форму части кольца, в дальнейшем подвергается некоторой деформации при сохранении общей схожести формы.

Поэтому, ввиду большой величины разности между верхней оценкой площади и результатом Ромика и Каллуса ($2,83 - 2,37 = 0,46$), можно предположить, что при дальнейших уточнениях площадь будет изменяться незначительно и её верхний предел недостижим.

Список литературы

1. Алгебра, 9 класс. Под ред. С.А. Теляковского. Москва, просвещение, 2016
2. Беляев А. Задачи на наибольшие и наименьшие величины, решаемые начальной математикой. Москва, 1881
3. Болтянский В.Г. Математика решает задачи на оптимизацию. Москва, Знание, 1997
4. Возняк Г.М., Гусев В.А. Прикладные задачи на экстремумы. Москва, Просвещение, 1985
5. Геометрия, 7-9 класс Л.С. Атанасян и др. Москва, Просвещение, 2016
6. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом Н.Н. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. Москва, Наука, 1974

Интернет-ресурсы:

- ☐ 1. http://cit-psu.ru/documents/conference_2014/book.pdf
- ☐ 2. <http://deoma-cmd.ru/>(лекция №5 «Экстремумы в геометрии»)
- ☐ 3. https://en.wikipedia.org/wiki/Moving_sofa_problem
- ☐ 4. <http://www.etudes.ru/>
- ☐ 5. http://ru.unionpedia.org/Открытые_математические_проблемы